2. Gráfelméleti alapfogalmak:

**Pont:**

* A gráf legkisebb egysége
* G lerajzolásakor a csúcsokat pontoknak feleltetjük meg
* Jele: V={A,B,C,D}

**Él:**

* Pontpár
* Élek olyan síkgörbék, melyek az adott él két végpontját kötik össze, önmagukat nem metszik, és más végpontokat elkerülnek.
* Jele: E={AB}
* Típusai:
  + párhuzamosél: két él párhuzamos, ha végpontjaik megegyeznek
  + hurokél: olyan él, melynek végpontjai megegyeznek

**Fokszám**

* Definíció: A gráf v csúcsából induló élek száma (hurokél 2x számít).
* Jelölése: d (v)
* A G gráfot regulárisnak hívjuk, ha minden csúcsának a fokszáma ugyanannyi vϵV(G)-re d(v)=k

**Fokszámösszeg:**

* Tétel: Ha G véges, irányítatlan gráf, akkor a fokszámainak az összege éppen az élek számának kétszerese. ∑𝑣𝜖𝑉(𝐺) 𝑑(𝑣) = 2|E (G)|
* Bizonyítás: Ha E(G)=0, akkor igaz a tétel, és ha elkezdünk a gráfba éleket behúzni, minden él behúzásával 2-vel nő a fokszámok összege.
* Következtetés: Minden véges gráfnak páros sok páratlan fokú csúcsa van → fokszámok összege mindig páros

**Egyszerűgráf:**

* G (V, E) ahol V a csúcsok halmaza, E az élek halmaza a G gráfban
  + V ≠ 0
  + E elemei V bizonyos kételemű részhalmazai
* Ha nem tartalmaz többszörös éleket, hurokéleket.

**Részgráf:**

* H az G részgráfja, ha H megkapható a G gráfból csúcs és éltörlésekkel.
* adott G (V, E) gráf. H (V2, E2) részgráfja G-nek, ha V2 C V és E2 C E

**Feszített részgráf:**

* H a G részgráfja, ha H megkapható G gráfból csúcstörlésekkel (ha egy csúcsot törlünk törlődnek a csúcsra illeszkedő élek is).
* adott G (V, E) gráf. H (V2, E2) feszített részgráfja G-nek, ha V2 C V és E2 C E, de E2 E minden olyan élét tartalmazza, amely V2-beli pontokat köt össze.

**Izomorfia:**

* G és H gráfok izomorfak, ha ugyanannyi csúcsuk van és ezek a csúcsok megszámozhatók 1-től N-ig, úgy hogy minden i és j esetén az i-dik csúcsból ugyanannyi él fut a j-dik G-ben, mint H-ban. (át tudjuk számozni őket)

**Élsorozat:**

* A G gráf élsorozata egy olyan (v1,e1,v2,e2,….,vk) sorozat, amire ei ϵ E(G) és ei=vi vi+1
* Csúcsok és élek felváltva követik egymást, csúccsal kezdve

**Séta:** Olyan élsorozat, aminek minden éle különböző.

**Út:** Olyan séta, aminek a csúcsi különbözőek (nem ismétlődnek)

**Kör:** A kezdő és a végpont megegyezik, minden más pont különböző (zárt út)/ olyan út, aminek a kezdő és a végpontja azonos

**Összefüggő gráf:** A G gráf összefüggő, ha bármely két pontja között vezet séta (nincs izolált pontja, olyan pontja, amiből nem indul él)

**Komponens:** A gráf maximális összefüggő részegységei. K ⊆ V(G), ha bármely u, v ϵ K között vezet út, de u ϵ K és v ϵ (V(G)\K) között nem. Bármely gráf egyértelműen felbontható komponensek uniójára.

**Erdő:** G gráf erdő, ha G körmentes (komponensei a fák)

**Fa:** G fa, ha G összefüggő és körmentes

Fák egyszerűbb tulajdonságai:

* **Két elsőfokú pont:** 
  + Def.: V a G gráf levele, ha d(v)=1 (azaz elsőfokú pont)
  + Tétel: minden legalább 2 pontú fának legalább két elsőfokú csúcsa van
  + Bizonyítása: Tekintsük F egy leghosszabb útját, mondjuk p-t. A p út egyik végéből sem indulhat tovább él, ha az ugyanis P-n kívüli pontba futna, akkor P nem lenne a leghosszabb, ha pedig P egy pontjába, akkor a gráf nem lenne körmentes.
* **Fák (erdők) élszáma:** |E(G)|=|V(G)|-1
  + Tétel: Tfh. G n pontú erdő és k komponense van. Ekkor |E(G)|=n-k
  + Köv.: Ha F n pontú fa, akkor |E(G)|=n-1 → F olyan erdő, aminek egy komponense van
  + Bizonyítása: építsünk egy F fát n pontú üres gráfból. Húzzuk be úgy az éleket, hogy ne alkossanak kört! Az éleket behúzva mindig eggyel csökken a komponensek száma, |E(G)| pedig egyel nő. Ha végül F összefüggő, akkor n-ről 1-re csökken a komponensek száma, és pont n-1 élt húztunk be.